Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria

2º Esonero e 1º recupero di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica
Compito (A) 17–02-07 A.A. 2006/2007

Problema n.1 (12) Siano α e ω due numeri reali con $\omega \neq 0$. Sia $H(t)$ la funzione che vale 0 per $t < 0$ e 1 per $t \geq 0$. Si consideri la seguente equazione integro–differenziale

$$\begin{cases} y' + \alpha \displaystyle\int_0^t H(\tau) \cdot y(t-\tau) d\tau = \sin(\omega t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1) Si risolva l'equazione per $\alpha > 0$, $\alpha \neq \omega^2$
2) Si risolva l'equazione per $\alpha = \omega^2$
3) Si risolva l'equazione per $\alpha = 0$
4) Si risolva l'equazione per $\alpha < 0$
5) Si dica per quali valori di α la soluzione della equazione è limitata

Problema n.2 (17) Siano a e α reali positivi. Al variare di α si risolva la seguente equazione differenziale.

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \delta(t - \dfrac{x}{\alpha}) \quad t > 0 \\ u(x,0) = 1, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = 1 \end{cases}$$

1) Si consideri il caso $\alpha \neq a$
2) Si consideri il caso $\alpha = a$. In questo caso, per risolvere l'equazione differenziale ordinaria nella trasformata di Laplace $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$, si provi la soluzione $v(x,p) = \xi + \eta x e^{-\frac{p}{a}x}$ e si cerchino ξ, η in modo tale da soddisfare la non omogenea

Problema n.3 (8) Si risolva il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^{-t} \\ y(0) = y_0, \ y'(0) = y_1 \end{cases}$

Detta $y(t; y_0, y_1)$ la soluzione, si trovino y_0 e y_1 tale che $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t; y_0, y_1) = 0$

Problema n.4 (8) Sia data la funzione complessa $f(z)$ che ristratta ad un opportuno sottoinsieme $\mathcal{D}$ del piano complesso è data da $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{z}{4})^k + \sum_{k=0}^{+\infty} (2z)^{-k}$.

1) Si trovi l'insieme $\mathcal{D}$.
2) Si trovi l'insieme in cui $f(z)$ è olomorfa
3) Si trovi lo sviluppo di Laurent della funzione $f(z)$ centrato in $z = 0$ e convergente per $|z| \geq 10$
4) Si calcolino gli integrali $\displaystyle\oint_\gamma f(z) dz$ dove γ è rispettivamente: i) la circonferenza di centro 0 e raggio $\dfrac{1}{4}$ ii) la circonferenza di centro 0 e raggio 1 iii) la circonferenza di centro 0 e raggio 5 iv) la circonferenza di centro 1 e raggio 4
5) Si calcoli il residuo del punto all'infinito

2º Esonero e 1º recupero di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica
Compito (B) 17–02-07 A.A. 2006/2007

Problema n.1 (12) Siano α e ω due numeri reali con $\omega \neq 0$. Sia $H(t)$ la funzione che vale 0 per $t < 0$ e 1 per $t \geq 0$. Si consideri la seguente equazione integro–differenziale

$$\begin{cases} y' + \alpha \displaystyle\int_0^t H(\tau) \cdot y(t-\tau) d\tau = \cos(\omega t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1) Si risolva l'equazione per $\alpha > 0$, $\alpha \neq \omega^2$
2) Si risolva l'equazione per $\alpha = \omega^2$
3) Si risolva l'equazione per $\alpha = 0$
4) Si risolva l'equazione per $\alpha < 0$
5) Si dica per quali valori di α la soluzione della equazione è limitata

Problema n.2 (17) Siano a e α reali positivi. Al variare di α si risolva la seguente equazione differenziale.

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \delta(t - \dfrac{x}{\alpha}) \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 1, \quad u_x(0,t) = 1 \end{cases}$$

1) Si consideri il caso $\alpha \neq a$
2) Si consideri il caso $\alpha = a$. In questo caso, per risolvere l'equazione differenziale ordinaria nella trasformata di Laplace $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$, si provi la soluzione $v(x,p) = \xi + \eta x e^{-\frac{p}{a}x}$ e si cerchino ξ, η in modo tale da soddisfare la non omogenea

Problema n.3 (8) Si risolva il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t \\ y(0) = y_0, \ y'(0) = y_1 \end{cases}$

Detta $y(t; y_0, y_1)$ la soluzione, si trovino y_0 e y_1 tale che $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t; y_0, y_1) - \frac{1}{2}t^2 e^t}{e^t} = 1$

Problema n.4 (8) Sia data la funzione complessa $f(z)$ che ristratta ad un opportuno sottoinsieme $\mathcal{D}$ del piano complesso è data da $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{z}{4})^k + \sum_{k=0}^{+\infty} (4z)^{-k}$.

1) Si trovi l'insieme $\mathcal{D}$.
2) Si trovi l'insieme in cui $f(z)$ è olomorfa
3) Si trovi lo sviluppo di Laurent della funzione $f(z)$ centrato in $z = 0$ e convergente per $|z| \geq 10$
4) Si calcolino gli integrali $\displaystyle\oint_\gamma f(z)dz$ dove γ è rispettivamente: i) la circonferenza di centro 0 e raggio $\dfrac{1}{8}$ ii) la circonferenza di centro 0 e raggio 1 iii) la circonferenza di centro 0 e raggio 5 iv) la circonferenza di centro 1 e raggio 4
5) Si calcoli il residuo del punto all'infinito

2º Esonero e 1º recupero di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica
Compito (C) 17–02-07 A.A. 2006/2007

Problema n.1 (12) Siano α e ω due numeri reali con $\omega \neq 0$. Sia $H(t)$ la funzione che vale 0 per $t<0$ e 1 per $t \geq 0$. Si consideri la seguente equazione integro–differenziale

$$\begin{cases} y' + \alpha \displaystyle\int_0^t H(\tau)\cdot y(t-\tau)d\tau = \sin(2\omega t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1) Si risolva l'equazione per $\alpha > 0$, $\alpha \neq 4\omega^2$
2) Si risolva l'equazione per $\alpha = 4\omega^2$
3) Si risolva l'equazione per $\alpha = 0$
4) Si risolva l'equazione per $\alpha < 0$
5) Si dica per quali valori di α la soluzione della equazione è limitata

Problema n.2 (17) Siano a e α reali positivi. Al variare di α si risolva la seguente equazione differenziale.

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \delta(t - \dfrac{x}{\alpha}) \quad t > 0 \\ u(x,0) = 1, \quad u_t(x,0) = 1, \quad u_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

1) Si consideri il caso $\alpha \neq a$
2) Si consideri il caso $\alpha = a$. In questo caso, per risolvere l'equazione differenziale ordinaria nella trasformata di Laplace $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$, si provi la soluzione $v(x,p) = \xi + \eta x e^{-\frac{p}{a}x}$ e si cerchino ξ, η in modo tale da soddisfare la non omogenea

Problema n.3 (8) Si risolva il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^{-2t} \\ y(0) = y_0, \ y'(0) = y_1 \end{cases}$

Detta $y(t; y_0, y_1)$ la soluzione, si trovino y_0 e y_1 tale che $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t; y_0, y_1) = 0$

Problema n.4 (8) Sia data la funzione complessa $f(z)$ che ristratta ad un opportuno sottoinsieme $\mathcal{D}$ del piano complesso è data da $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (\frac{z}{8})^k + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (2z)^{-k}$.

1) Si trovi l'insieme $\mathcal{D}$.
2) Si trovi l'insieme in cui $f(z)$ è olomorfa
3) Si trovi lo sviluppo di Laurent della funzione $f(z)$ centrato in $z = 0$ e convergente per $|z| \geq 10$
4) Si calcolino gli integrali $\oint_\gamma f(z)dz$ dove γ è rispettivamente: i) la circonferenza di centro 0 e raggio $\frac{1}{4}$ ii) la circonferenza di centro 0 e raggio 1 iii) la circonferenza di centro 0 e raggio 10 iv) la circonferenza di centro 5 e raggio 6
5) Si calcoli il residuo del punto all'infinito

$2^{\underline{o}}$ Esonero e $1^{\underline{o}}$ recupero di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica
Compito (D) 17–02-07 A.A. 2006/2007

Problema n.1 (12) Siano α e ω due numeri reali con $\omega \neq 0$. Sia $H(t)$ la funzione che vale 0 per $t < 0$ e 1 per $t \geq 0$. Si consideri la seguente equazione integro–differenziale

$$\begin{cases} y' + \alpha \displaystyle\int_0^t H(\tau)\cdot y(t-\tau)d\tau = \cos(2\omega t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1) Si risolva l'equazione per $\alpha > 0$, $\alpha \neq 4\omega^2$
2) Si risolva l'equazione per $\alpha = 4\omega^2$
3) Si risolva l'equazione per $\alpha = 0$
4) Si risolva l'equazione per $\alpha < 0$
5) Si dica per quali valori di α la soluzione della equazione è limitata

Problema n.2 (17) Siano a e α reali positivi. Al variare di α si risolva la seguente equazione differenziale.

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \delta(t - \dfrac{x}{\alpha}) \quad t > 0 \\ u(x,0) = -1, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = 1 \end{cases}$$

1) Si consideri il caso $\alpha \neq a$
2) Si consideri il caso $\alpha = a$. In questo caso, per risolvere l'equazione differenziale ordinaria nella trasformata di Laplace $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$, si provi la soluzione $v(x,p) = \xi + \eta x e^{-\frac{p}{a}x}$ e si cerchino ξ, η in modo tale da soddisfare la non omogenea

Problema n.3 (8) Si risolva il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + y(t) = e^{2t} \\ y(0) = y_0, \ y'(0) = y_1 \end{cases}$

Detta $y(t; y_0, y_1)$ la soluzione, si trovino y_0 e y_1 tale che $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t;y_0,y_1) - \frac{1}{2}t^2 e^{2t}}{e^{2t}} = 1$

Problema n.4 (8) Sia data la funzione complessa $f(z)$ che ristratta ad un opportuno sottoinsieme $\mathcal{D}$ del piano complesso è data da $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{z}{8})^k + \sum_{k=0}^{+\infty} (4z)^{-k}$.

1) Si trovi l'insieme $\mathcal{D}$.
2) Si trovi l'insieme in cui $f(z)$ è olomorfa
3) Si trovi lo sviluppo di Laurent della funzione $f(z)$ centrato in $z = 0$ e convergente per $|z| \geq 10$
4) Si calcolino gli integrali $\displaystyle\oint_\gamma f(z)dz$ dove γ è rispettivamente: i) la circonferenza di centro 0 e raggio $\dfrac{1}{8}$ ii) la circonferenza di centro 0 e raggio 1 iii) la circonferenza di centro 0 e raggio 10 iv) la circonferenza di centro 5 e raggio 5
5) Si calcoli il residuo del punto all'infinito